Übungsstunde 10:

- Das Eigenwertproblem:
  - Eigenwerte
  - Eigenvektoren
  - Bei symmetrischen Matrizen
- Anwendungen:
  - $\underline{\underline{A}}^k$
  - $e^{\underline{\underline{A}}}$
- Differentialgleichungssysteme

Das Eigenwertproblem:

Eigenwert: (EW)

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0 \leftarrow$$

Eigenschaften:

- $P_A(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (\lambda - c_1)^k (\lambda - c_2)^l$
- Algebraische Vielfachheit: wie oft kommt die NS vor
- $\exists$ mindestens 1 EW
- $\exists$ höchstens n EW
- $\sum$ algebraischen Vielfachheit $\overset{!}{=} n$
- Dreiecksmatrix: EW auf der Diagonalen
- λ ein EW von $\underline{\underline{A}} \Rightarrow \lambda^{-1}$ ein EW von $\underline{\underline{A}}^{-1}$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$$

Eigenvektor: $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$

Eigenvektoren

Eigenschaften:

- Dimension von $\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ = geometrische Vielfachheit
- $1 \leq$ geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische V. $\leq n$

Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

EW:

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \underline{\underline{1}}, \quad \lambda_2 = \underline{\underline{2}}$$

EV:

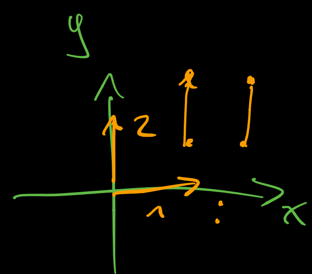
$\lambda_1 = 1$: $(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}})\underline{x} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = t, \; x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$



$$\Rightarrow \underline{\underline{E_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

Eigenschaften:

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene EW

  $\Rightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ linear unabhängig

- Falls algebraische V. $= 1 \quad \forall \lambda_i$

  $\Rightarrow A$ $\boxed{\text{einfach}}$

- Falls algebr. V. = geom. V. $\forall \lambda_i$

  $\Rightarrow A$ $\boxed{\text{halbeinfach}}$

  ↳ A^n & A^T auch halbeinfach

- Ist A einfach, so <u>nicht</u> A^n

<u>Ähnliche Matrizen:</u>

- $$B = T^{-1} A T$$

  $\Rightarrow$ A & B sind ähnlich

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T^{-1}"] & \tilde{B} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ B \arrow[r, "B"] \arrow[u, "T"] & B \end{tikzcd}$$

- A & B haben dasselbe charakt. Polynom

- $Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad y = T^{-1} x$ EW von B

$$B y = \lambda y$$

$$T^{-1} A T y = \lambda y$$

$$T^{-1} A \underbrace{T T^{-1}}_{I} x = \lambda T^{-1} x$$

$$T^{-1} A x = T^{-1} \lambda x$$

<u>Diagonalisierbarkeit:</u>

$\exists T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.d. $T^{-1} A T = D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$\Rightarrow A$ diagonalisierbar

- Spalten von $\underline{\underline{T}}$ sind die EV von $\underline{\underline{A}}$
- Einträge in $\underline{\underline{D}}$ sind die dazugehörigen EW.

- Folgene Aussagen sind äquivalent:
  (i) $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach
  (ii) $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine Eigenbasis
  (iii) $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar

Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen: $\underline{\underline{A}}$ symm.

- Alle EW von $\underline{\underline{A}}$ sind reell.
- EV zu versch. EW sind orthogonal ←
- $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach
- $\underline{\underline{A}}$ besitzt ONB als Eigenbasis
- $$\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}$$

Anwendungen:

$\underline{\underline{A}}^k\underline{x}$:

$$\underline{\underline{A}}^k\underline{x} = \underline{c}$$

$$\Rightarrow (\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1})^k\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1})(\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{I}}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1})(\dots)\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k\,\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x} = \underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}}^k = \operatorname{diag}(d_1^k, d_2^k, d_3^k, \dots, d_n^k) = \begin{bmatrix} d_1^k & & & \emptyset \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}}_{\underline{z}} = \underline{c} \qquad \underline{z} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$$

$$a=0 \qquad \underline{x} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^k \underline{z} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{w} = \underline{c}$$

$\underline{\underline{A}}$ symm. : $\quad \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^T \underline{x} = \underline{c}$

$e^{\underline{\underline{A}}x}$:

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(TDT^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{TD^nT^{-1}}{n!}$$

$$= T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} T^{-1} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$e^{\underline{\underline{D}}} = \mathrm{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n}) = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & & 0 \\ & e^{d_2} & & \\ & & e^{d_3} & \\ 0 & & \ddots & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\underline{\underline{A}}x} = \underline{\underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme:

1. Ordnung:

$$y' = a \cdot y$$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{ax} \quad , \; y(0) = b = y_0$$

$$\Rightarrow y(x) = b \cdot e^{ax}$$

$$= \underline{\underline{y_0 \cdot e^{ax}}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ y_2' &= a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \\ y_3' &= \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} , \quad y_0 = \underline{y_0}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{y_0}$$

$$\Rightarrow \underline{y}(x) = e^{\underline{\underline{A}} x} \underline{y_0} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}} x}\, \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{y_0}$$

Herleitung:

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}}_{\underline{z}} \qquad \underline{z} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{z} \quad \Big|\, \underline{\underline{T}}^{-1}\cdot \qquad y_0 = \underline{\underline{T}}\, z_0$$

$$\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\underline{z}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1' &= d_1 z_1 \\ z_2' &= d_2 z_2 \\ &\vdots \\ z_n' &= d_n z_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= e^{d_1 x} z_{10} \\ z_2 &= e^{d_2 x} z_{20} \\ &\vdots \\ z_n &= e^{d_n x} z_{n0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{z} = e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{z}_0$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{z}_0 \qquad \underline{z}_0 = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}_0$$

$$= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}_0$$

$$= z_{10} e^{\lambda_1 x} \underline{t}^{(1)} + z_{20} e^{\lambda_2 x} \underline{t}^{(2)} + \dots + z_{n0} e^{\lambda_n x} \underline{t}^{(n)}$$

Lineare ODE's 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ y_2'' &= \ddots \\ &\vdots \\ y_n'' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y}'' = \underline{\underline{A}}\, \underline{y} \qquad \underline{y}(0) = \underline{c}, \quad \underline{y}'(0) = \underline{d}$$

$$\underline{y}'' = \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{y}$$

$$\Rightarrow \underline{z}'' = \underline{\underline{D}}\, \underline{z}$$

$$\Rightarrow z_i'' = d_i z_i \qquad \omega_i = \sqrt{-d_i}$$

$$z_i'' + \omega_i^2 z_i = 0$$

$$\Rightarrow z_i(x) = a_i \cos(\omega_i x) + b_i \sin(\omega_i x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x) = {} & [a_1 \cos(\omega_1 x) + b_1 \sin(\omega_1 x)]\, \underline{t}^{(1)} \\ & + [a_2 \cos(\omega_2 x) + b_2 \sin(\omega_2 x)]\, \underline{t}^{(2)} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Bsp: ODE 1. Ordnung

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \quad , \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 \underbrace{-3\lambda}_{\text{Summe}} \underbrace{-4}_{\text{Produkt}} = (\lambda \underline{-4})(\lambda + \underline{1}) \Rightarrow \lambda_1 = \underline{4} \,,\; \lambda_2 = \underline{-1}$$

EV:

$\lambda_1 = 4$: $(\underline{\underline{A}} - 4\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{1}{3}s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = -1$: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{1}{2}s \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{y}(x) = z_{10}\, e^{\lambda_1 x}\, \underline{t}^{(1)} + z_{20}\, e^{\lambda_2 x}\, \underline{t}^{(2)}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{z} = \underline{y} \iff \underline{\underline{T}}\,\underline{z_0} = \underline{y_0}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix} \quad \xrightarrow{II - 3I} \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow z_{20} = \underline{-2}$$

$$z_{10} = \underline{2}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \underline{\underline{2e^{4x}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$

Übungsstunde 10:

- Das Eigenwertproblem:
  - ↳ Eigenwerte
  - ↳ Eigenvektoren
  - ↳ Bei symmetrischen Matrizen
- Anwendungen:
  - ↳ $\underline{\underline{A}}^k$
  - ↳ $e^{\underline{\underline{A}}}$
- Differentialgleichungssysteme

Das Eigenwertproblem:

$$\underset{\text{EW}}{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda}\ \underset{\text{EV}}{\underline{x}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \lambda \underline{x} = 0$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0 \qquad \Leftarrow \qquad \underline{x} = 0$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0$$

$$\mathrm{Chp}(\lambda) := \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (\lambda - a_1)^{k} (\lambda - a_2)^{\ell} (\ldots) \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\boxed{\overset{!}{=} 0} \qquad\qquad k + \ell + \ldots = n$$

↳ gibt uns $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ EW von $\underline{\underline{A}}$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \overset{!}{=} 0$

$$\underline{\lambda_1 = 2}, \quad \underline{\lambda_2 = 1}$$

Eigenschaften:

- ∃ mindestens 1 EW
- ∃ höchstens n EW
- k & ℓ sind die $\boxed{\text{algebraischen Vielfachheiten}}$ des jew. EW

- $\sum$ alg. V. $\overset{!}{=} n$
- EW einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente
- λ EW von $\underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow$ λ^{-1} EW zu $\underline{\underline{A}}^{-1}$
- spur (A) = $\sum$ EW mit alg. Vielfachheit

<u>Eigenvektoren:</u>

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0$$

$\Rightarrow$ liefert uns die EV $\underline{x}$ zu den entsprechenden EW λ

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

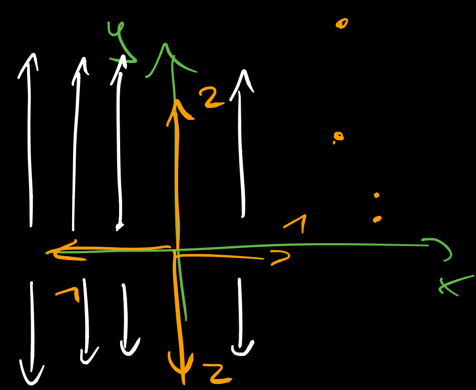
EW: $\quad \underline{\lambda_1 = 2}\ , \ \underline{\lambda_2 = 1}$

EV:

λ_1: $\quad (\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underset{E_{\lambda_1}}{E_2} = \underline{\underline{\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$



λ_2: $\quad \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underset{E_{\lambda_2}}{E_1} = \underline{\underline{\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$

Eigenschaften:

- dim des Eigenraumes eines EW nennt man die geometrische Vielfachheit
- $1 \leq$ geom. V. $\leq$ alg. V. $\leq n$
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\Rightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sind linear unabhängig
- $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} \Rightarrow$ A & B ähnlich

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "A"] & \tilde{B} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ B \arrow[u, "T"] \arrow[r, "B"'] & B \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ Chp(λ) von A = Chp(λ) von B

$\Rightarrow$ A&B haben dieselben EW

$\underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{A}}$

$\Rightarrow \underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{x} \in$ EV von $\underline{\underline{B}}$

- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. V. $= 1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ einfach
- Falls $\forall i: \lambda_i$ alg. V. = geom. V. $\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ halbeinfach
  - $\underline{\underline{A}}$ halbeinfach $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$ & $\underline{\underline{A}}^{T}$ auch halbeinfach
  - $\underline{\underline{A}}$ einfach $\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$ nicht einfach

Diagonalisierbarkeit:

- $\exists\ \underline{\underline{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.d. $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "A"] & \tilde{B} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ B \arrow[u, "T"] \arrow[r, "D"'] & B \end{tikzcd}$$

- Spalten von $\underline{\underline{T}}$ sind die EV von $\underline{\underline{A}}$
- Einträge in $\underline{\underline{D}}$ sind die entsprechenden EW von $\underline{\underline{A}}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach
- $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine Eigenbasis
- $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar

Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen: $\underline{\underline{A}}$ symm.

- Alle EW von $\underline{\underline{A}}$ sind reell
- EV zu EW $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind orthogonal! ←
- $\underline{\underline{A}}$ ist halbeinfach => diagonalisierbar
- $\underline{\underline{A}}$ besitzt eine ONB als Eigenbasis
- $\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T}}^{T} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}}$

Anwendungen des Eigenwertproblemes:

$\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$:

$$\underline{\underline{A}}^k = (\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{T}}^{-1})^k$$

$$= (\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}\, \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1})(\underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{I}}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{T}}^{-1})(\ldots)$$

$$= \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}^k\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$e^{\underline{\underline{A}}\underline{x}}$:

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{D}}^n\, \underline{\underline{T}}^{-1}}{n!}$$

$$= \underline{\underline{T}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{D}}^n}{n!} \right) \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}}\, \underline{\underline{T}}^{-1}$$

Eigenschaften:

- $$e^{\underline{\underline{A}}^T} = \left(e^{\underline{\underline{A}}}\right)^T$$

- $$\frac{d}{dt}\left(e^{\underline{\underline{A}}t}\right) = \underline{\underline{A}}\, e^{\underline{\underline{A}}t}$$

- $$e^{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}^{-1} e^{\underline{\underline{A}}}\, \underline{\underline{T}} \qquad e^{\underline{\underline{D}}} = e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^{A}T$$

- $$\det\left(e^{A}\right) = e^{\operatorname{spur}(A)}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \\
y_3' &= \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\underline{y}(x) &= e^{\underline{\underline{A}}x}\, \underline{y}_0 \\
&= e^{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}x}\, \underline{y}_0 \\
&= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\, \underline{\underline{T}}^{-1}\, \underline{y}_0
\end{aligned}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}}_{\underline{z}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{z} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}'}_{} = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\underline{z}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$\begin{aligned}
z_1' &= d_1 z_1 \\
z_2' &= \qquad d_2 z_2 \\
z_3' &= \qquad\qquad d_3 z_3 \\
&\vdots \\
z_n' &= \qquad\qquad\qquad d_n z_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_{10}\, e^{d_1 x} \\
z_2 &= z_{20}\, e^{d_2 x} \\
&\vdots \\
z_n &= z_{n0}\, e^{d_n x}
\end{aligned}$$

$$\underline{z}(x) = e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{z}_0$$

$$\underline{y}(x) = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}(x) = \boxed{\underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{z}_0} \qquad \underline{z}_0 = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{y}_0$$

$$= \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}x}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{y}_0$$

$$= z_{10} e^{d_1 x} \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \\ 1 \end{bmatrix} + z_{20} e^{d_2 x} \begin{bmatrix} 1 \\ t_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + z_{n0} e^{d_n x} \begin{bmatrix} 1 \\ t_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lineare ODE's 2. Ordn.:

$$y_1'' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n$$
$$y_2'' = a_{21} \quad a_{22} \quad \dots$$
$$y_3'' =$$
$$\vdots$$
$$y_n'' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}'' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

$$\underline{y}'' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \underline{y}}_{z}$$

$$\underline{z}'' = \underline{\underline{D}}\,\underline{z}$$

$$z_i'' = d_i z_i \qquad \omega_i = \sqrt{-d_i}$$

$$z_i'' + \omega_i^2 z_i = 0$$

$$z_i(x) = a_i \cos(\omega_i x) + b_i \sin(\omega_i x)$$

$$\Rightarrow \underline{y}(x) = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}(x) = [a_1 \cos(\omega_1 x) + b_1 \sin(\omega_1 x)] \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$+ [a_2 \cos(\omega_2 x) + b_2 \sin(\omega_2 x)] \begin{bmatrix} 1 \\ t_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$+ \dots$$
$$+ [a_n \dots \dots]$$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y}$$

EW: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \overset{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6$$

$$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 \underbrace{- 3\lambda}_{+} \underbrace{- 4}_{\cdot}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 4}}, \quad \underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$$

EV:

λ_1: $\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{1}{3}s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}}$$

λ_2: $\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{1}{2}s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{z_0} = y_0$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{II - 3I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_{02} = \underline{-2} \\ z_{01} = \underline{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}(x) = \underline{\underline{2e^{4x}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}}$$